Een vierkant en vier vectoren

8 maximumscore 6

- $\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}p\\-1\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 1
- $\cos(\angle PCA)=\dfrac{\begin{pmatrix}p\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}p\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right|}$ 1
- Dit is gelijk aan $\dfrac{p+1}{\sqrt{p^2+1}\cdot\sqrt{2}}$ 1
- ($\overrightarrow{CQ}=\begin{pmatrix}\frac{1}{p}\\-1\end{pmatrix}$ dus) (p vervangen door $\frac{1}{p}$ geeft)

  $\cos(\angle ACQ)=\dfrac{\frac{1}{p}+1}{\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}\cdot\sqrt{2}}$ 1
- Teller en noemer van $\dfrac{\frac{1}{p}+1}{\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}\cdot\sqrt{2}}$ vermenigvuldigen met p geeft

  $\dfrac{1+p}{\sqrt{p^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}\cdot\sqrt{2}}$ 1
- Dit is gelijk aan $\dfrac{1+p}{\sqrt{1+p^2}\cdot\sqrt{2}}$, (dus $\cos(\angle ACQ)=\cos(\angle PCA)$,) dus (in deze situatie) $\angle ACQ=\angle PCA$ (dus de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CP}$ en $\overrightarrow{CA}$ is gelijk aan de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$) 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- $\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}p\\-1\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 1
- $\cos(\angle PCA)=\dfrac{\begin{pmatrix}p\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}p\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right|}$ 1
- Dit is gelijk aan $\dfrac{p+1}{\sqrt{p^2+1}\cdot\sqrt{2}}$ 1
- ($\overrightarrow{CQ}=\begin{pmatrix}\frac{1}{p}\\-1\end{pmatrix}$ dus) (p vervangen door $\frac{1}{p}$ geeft)

  $\cos(\angle ACQ)=\dfrac{\frac{1}{p}+1}{\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}\cdot\sqrt{2}}$ 1
- Gelijkstellen van beide uitdrukkingen en vervolgens kruislings vermenigvuldigen geeft (dat bewezen moet worden:)
  $\sqrt{p^2}\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}+\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{p^2}}\sqrt{p^2+1}+\sqrt{p^2+1}$ 1
- Dit geeft $\sqrt{1+p^2}+\sqrt{\frac{1}{p^2}+1}=\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}+\sqrt{p^2+1}$, (en dit is inderdaad aan elkaar gelijk, dus $\cos(\angle ACQ)=\cos(\angle PCA)$,) dus (in deze situatie) $\angle ACQ=\angle PCA$ (dus de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CP}$ en $\overrightarrow{CA}$ is gelijk aan de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$) 1

of

- De richtingscoëfficiënt van de lijn door C en Q is $\dfrac{-1}{\frac{1}{p}}=-p$ 1
- Het snijpunt R van de lijn door C en Q en lijnstuk AB heeft dus y-coördinaat $1-p$ 1
- $PA=1-p$, dus $PA=RA$ 1
- $\angle PAC=\angle RAC\ (=45°)$ (want AC is een diagonaal van een vierkant) 1
- Ook geldt $CA=CA$, dus ΔCAP is gelijkvormig met ΔCAR 1
- Uit deze gelijkvormigheid volgt dat $\angle ACQ=$ $(\angle ACR=)$ $\angle ACP$ (dus de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CP}$ en $\overrightarrow{CA}$ is gelijk aan de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$) 1

of

- $\dfrac{OC}{OP}=\dfrac{1}{p}$ 1
- $\dfrac{OQ}{OC}=\dfrac{\frac{1}{p}}{1}=\dfrac{1}{p}$ 1
- Ook geldt $\angle POC=\angle COQ$, dus ΔOPC is gelijkvormig met ΔOCQ 1
- $\angle OQC=\angle BCQ$ (Z-hoeken), dus $\angle OCP=\angle OQC=\angle BCQ$ 1
- $\angle ACP=45°-\angle OCP$ en $\angle QCA=45°-\angle BCQ$ 1
- Dus $\angle ACP=\angle QCA$ (dus de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CP}$ en $\overrightarrow{CA}$ is gelijk aan de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$) 1

9 **maximumscore 7**

- De coördinaten van M zijn $\left(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 1
- $\overrightarrow{PB}=\begin{pmatrix}1-p\\1\end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{QM}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{PB}$ staat loodrecht op $\overrightarrow{QM}$ als $\begin{pmatrix}1-p\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=0$ 1
- De vergelijking $(1-p)\cdot\left(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+1\cdot\frac{1}{2}=0$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $p\approx 0,54$ (want $0<p<1$) 1

of

- De richtingscoëfficiënt van de lijn door P en B is $\dfrac{1}{1-p}$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door M loodrecht op PB is $p-1$ 1
- De coördinaten van M zijn $\left(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 1
- Hieruit volgt dat een vergelijking van de lijn door M loodrecht op PB is $y=(p-1)x-\frac{1}{2}p^2+1$ 1
- Deze lijn gaat door Q als $0=(p-1)\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{2}p^2+1$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $p\approx 0,54$ (want $0<p<1$) 1

of

- In dit geval is de lijn door M en Q de middelloodlijn van lijnstuk PB — 2
- (Omdat Q op deze middelloodlijn ligt, geldt) $PQ = BQ$ — 1
- $PQ = \frac{1}{p} - p$ en $AQ = \frac{1}{p} - 1$ — 1
- $BQ = \sqrt{\left(\frac{1}{p} - 1\right)^2 + 1}$ — 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\frac{1}{p} - p = \sqrt{\left(\frac{1}{p} - 1\right)^2 + 1}$ kan worden opgelost — 1
- $p \approx 0{,}54$ (want $0 < p < 1$) — 1

of

- De coördinaten van M zijn $\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — 1
- $PM^2 = \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - p\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ — 1
- $QM^2 = \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ — 1
- $PQ^2 = \left(\frac{1}{p} - p\right)^2$ — 1
- De vergelijking $\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - p\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{p} - p\right)^2$ moet worden opgelost — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- $p \approx 0{,}54$ (want $0 < p < 1$) — 1

of

- De coördinaten van M zijn $\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — 1
- $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix}$ — 1
- Een vergelijking van een normaalvector van $\overrightarrow{PB}$ is $(1-p)x + y = c$ — 1
- Invullen van $Q\left(\frac{1}{p}, 0\right)$ geeft voor de normaalvector door Q dat $(1-p) \cdot \frac{1}{p} = c$ — 1
- De normaalvector moet door M gaan, dus er moet gelden $(1-p) \cdot \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = (1-p) \cdot \frac{1}{p}$ (en deze vergelijking moet worden opgelost) — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- $p \approx 0{,}54$ (want $0 < p < 1$) — 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- Er moet gelden $PQ \cdot AB = PB \cdot QM$ 1
- $PQ = \frac{1}{p} - p$ (en $AB = 1$) 1
- $PB = \sqrt{(1-p)^2 + 1}$ 1
- $QM = \sqrt{\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ 1
- De vergelijking $\left(\frac{1}{p} - p\right) \cdot 1 = \sqrt{(1-p)^2 + 1} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $p \approx 0{,}54$ (want $0 < p < 1$) 1

Opmerking
In het derde antwoordalternatief mogen voor het eerste antwoordelement uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.